<http://lib.vvsu.ru/books/Bakalavr01/page0220.asp>

|  |
| --- |
| **Классификация систем массового обслуживания** |
| Большинство экономических задач связано с системами массового обслуживания.  Системы, в которых, с одной стороны, возникают массовые запросы (требования) на выполнение каких-либо видов услуг, а с другой стороны, происходит удовлетворение этих запросов, называются *системами массового обслуживания.*  Система массового обслуживания включает следующие элементы: источник требований, входящий поток требований, очередь, обслуживающее устройство (обслуживающий аппарат, канал обслуживания), выходящий поток требований.  Системы массового обслуживания классифицируют по разным признакам. К таким признакам относятся условия ожидания требования начала обслуживания. В соответствии с этим признаком системы подразделяются на следующие виды:  - системы массового обслуживания с потерями (отказами);  - системы массового обслуживания с ожиданием;  - системы массового обслуживания с ограниченной длиной очереди;  - системы массового обслуживания с ограниченным временем ожидания.  Системы массового обслуживания, у которых требования, поступающие в момент, когда все приборы обслуживания заняты, получают отказ и теряются, называются *системами с потерями или отказами.*  Системы массового обслуживания, у которых возможно появление как угодно длинной очереди требований к обслуживающему устройству, называются *системами с ожиданием.*  Системы массового обслуживания, допускающие очередь, но с ограниченным числом мест в ней, называются *системами с ограниченной длиной очереди.*  Системы массового обслуживания, допускающие очередь, но с ограниченным сроком пребывания каждого требования в ней, называются *системами с ограниченным временем ожидания.*  По числу каналов или приборов системы делятся на *одноканальные* и *многоканальные.*  По месту нахождения источника требований системы массового обслуживания делятся на *разомкнутые,* когда источник находится вне системы, и *замкнутые,* когда источник находится в самой системе. К последнему виду относится, например, станочный участок, в котором станки являются источником неисправностей, а следовательно, и требований на их обслуживание.  Одной из форм классификации систем массового обслуживания является кодовая (символьная) *классификация Д.Кендалла.* При этой классификации характеристику системы записывают в виде трех, четырех или пяти символов, например *А \ В*\ *S,* где *А —* тип распределения входящего потока требований, *В —*  тип распределения времени обслуживания, S — число каналов обслуживания.  Для экспоненциального распределения принимают символ *М,* для любого (произвольного) распределения — символ *G.* Запись *G* / *М* / 3 означает, что входящий поток требований пуассоновский (простейший), время обслуживания распределено по экспоненциальному закону, в системе имеется три канала обслуживания.  Четвертый символ указывает допустимую длину очереди, а пятый — порядок отбора (приоритета) требований. |
|  |
|  |

<http://math.immf.ru/lections/206.html>

**Элементы теории массового обслуживания**

     Многие экономические организации и системы, получающие прибыль за счет обслуживания клиентов, можно достаточно точно описать с помощью совокупности математических методов и моделей, которые получили название теории массового обслуживания (ТМО). Рассмотрим основные аспекты ТМО.

**6.1. Компоненты и классификация моделей массового обслуживания**

*Системы массового обслуживания* (СМО)— это такие системы, в которые в случайные моменты времени поступают заявки на обслуживание, при этом поступившие заявки обслуживаются с помощью имеющихся в распоряжении системы каналов обслуживания.  
     С позиции моделирования процесса массового обслуживания ситуации, когда образуются очереди заявок (требований) на обслуживание, возникают следующим образом. Поступив в обслуживающую систему, требование присоединяется к очереди других (ранее поступивших) требований. Канал обслуживания выбирает требование из находящихся в очереди, с тем, чтобы приступить к его об служиванию. После завершения процедуры обслуживания очередного требования канал обслуживания приступает к обслуживанию следующего требования, если таковое имеется в блоке ожидания.  
     Цикл функционирования системы массового обслуживания подобного рода повторяется многократно в течение всего периода работы обслуживающей системы. При этом предполагается, что переход системы на обслуживание очередного требования после завершения обслуживания предыдущего требования происходит мгновенно, в случайные моменты времени.

*Примерами систем массового обслуживания могут служить:*

1. магазины;
2. банки;
3. ремонтные мастерские;
4. почтовые отделения;
5. посты технического обслуживания автомобилей, посты ремонта автомобилей;
6. персональные компьютеры, обслуживающие поступающие заявки или требования на решение тех или иных задач;
7. аудиторские фирмы;
8. отделы налоговых инспекций, занимающиеся приемкой и проверкой текущей отчетности предприятий;
9. телефонные станции и т.д.

*Основными компонентами системы массового обслуживания любого вида являются:*

1. входной поток поступающих требований или заявок на обслуживание;
2. дисциплина очереди;
3. механизм обслуживания.

     Раскроем содержание каждого из указанных выше компонентов.  
     ***Входной поток требований.***Для описания входного потока требуется задать вероятностный закон, определяющий последовательность моментов поступления требований на обслуживание и указать количество таких требований в каждом очередном поступлении. При этом, как правило, оперируют понятием «вероятностное распределение моментов поступления требований». Здесь могут поступать как единичные, так и групповые требования (требования поступают группами в систему). В последнем случае обычно речь идет о системе обслуживания с параллельно-групповым обслуживанием.  
     ***Дисциплина очереди*** *— это важный компонент системы массово­ го обслуживания, он определяет принцип, в соответствии с которым поступающие на вход обслуживающей системы требования подключаются из очереди к процедуре обслуживания. Чаще всего используются дисциплины очереди, определяемые следующими правилами:*  
     - первым пришел - первый обслуживаешься;  
     - пришел последним — обслуживаешься первым;  
     - случайный отбор заявок;  
     - отбор заявок по критерию приоритетности;  
     - ограничение времени ожидания момента наступления обслужи­ вания (имеет место очередь с ограниченным временем ожидания обслуживания, что ассоциируется с понятием «допустимая дли­ на очереди»).  
     ***Механизм обслуживания*** определяется характеристиками самой процедуры обслуживания и структурой обслуживающей системы. К характеристикам процедуры обслуживания относятся: продол­жительность процедуры обслуживания и количество требований, удовлетворяемых в результате выполнения каждой такой процеду­ры. Для аналитического описания характеристик процедуры обслу­ живания оперируют понятием «вероятностное распределение вре­ мени обслуживания требований».  
     Следует отметить, что время обслуживания заявки зависит от характера самой заявки или требований клиента и от состояния и возможностей обслуживающей системы. В ряде случаев приходит­ся также учитывать вероятность выхода обслуживающего прибора по истечении некоторого ограниченного интервала времени.  
     Структура обслуживающей системы определяется количеством и взаимным расположением каналов обслуживания (механизмов, приборов и т. п.). Прежде всего следует подчеркнуть, что система обслуживания может иметь не один канал обслуживания, а несколько; система такого рода способна обслуживать одновременно несколько требований. В этом случае все каналы обслуживания предлагают одни и те же услуги, и, следовательно, можно утверж­ дать, что имеет место параллельное обслуживание.  
     Система обслуживания может состоять из нескольких разно­ типных каналов обслуживания, через которые должно пройти каж­ дое обслуживаемое требование, т. е. в обслуживающей системе про­цедуры обслуживания требований реализуются последовательно. Механизм обслуживания определяет характеристики выходящего (обслуженного) потока требований.  
     Рассмотрев основные компоненты систем обслуживания, можно констатировать, что *функциональные возможности любой системы массового обслуживания определяются следующими основными факторами:*

1. вероятностным распределением моментов поступлений заявок на обслуживание (единичных или групповых);
2. вероятностным распределением времени продолжительности обслуживания;
3. конфигурацией обслуживающей системы (параллельное, последовательное или параллельно-последовательное обслуживание);
4. количеством и производительностью обслуживающих каналов;
5. дисциплиной очереди;
6. мощностью источника требований.

*В качестве основных критериев эффективности функционирования систем массового обслуживания в зависимости от характера решаемой задачи могут выступать:*

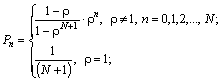
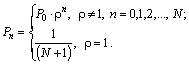
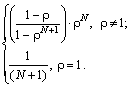
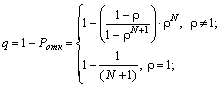
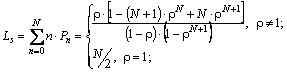
1. вероятность немедленного обслуживания поступившей заявки;
2. вероятность отказа в обслуживании поступившей заявки;
3. относительная и абсолютная пропускная способность системы;
4. средний процент заявок, получивших отказ в обслуживании;
5. среднее время ожидания в очереди;
6. средняя длина очереди;
7. средний доход от функционирования системы в единицу времени и т.п.

***Предметом теории массового обслуживания*** является установление зависимости между факторами, определяющими функциональные возможности системы массового обслуживания, и эффективностью ее функционирования. В большинстве случаев все параметры, описывающие системы массового обслуживания, являются случайными величинами или функциями, поэтому эти системы относятся к стохастическим системам.  
     *Независимо от характера процесса, протекающего в системе мас сового обслуживания, различают два основных вида СМО:*  
     - системы с отказами, в которых заявка, поступившая в систему в момент, когда все каналы заняты, получает отказ и сразу же покидает очередь;  
     - системы с ожиданием (очередью), в которых заявка, поступившая в момент, когда все каналы обслуживания заняты, становится в очередь и ждет, пока не освободится один из каналов.  
     *Системы массового обслуживания с ожиданием делятся на системы с ограниченным ожиданием и системы с неограниченным ожиданием.*  
     *В системах с* ***ограниченным ожиданием*** *может ограничиваться:*  
     - длина очереди;  
     - время пребывания в очереди.  
     В системах с ***неограниченным ожиданием*** заявка, стоящая в очереди, ждет обслуживание неограниченно долго, т.е. пока не подойдет очередь.  
     *Все системы массового обслуживания различают по числу каналов обслуживания:*  
     - одноканальные системы;  
     - многоканальные системы.  
     Приведенная классификация СМО является условной. На практике чаще всего системы массового обслуживания выступают в качестве смешанных систем. Например, заявки ожидают начала обслуживания до определенного момента, после чего система начинает работать как система с отказами.  
     *Определим характеристики систем массового обслуживания.*

**6.2. Одноканальная СМО с отказами**

*Простейшей одноканальной моделью* с вероятностными входным потоком и процедурой обслуживания является модель, характери­зуемая показательным распределением как длительностей интерва­лов между поступлениями требований, так и длительностей обслу­живания. При этом плотность распределения длительностей интер­валов между поступлениями требований имеет вид  
     http://math.immf.ru/img/962.gif  
     где λ — интенсивность поступления заявок в систему (среднее число заявок, поступающих в систему за единицу времени).  
     Плотность распределения длительностей обслуживания:  
     http://math.immf.ru/img/963.gif,  
     где http://math.immf.ru/img/964.gif – интенсивность обслуживания, *tоб* – среднее время обслуживания одного клиента.  
     Пусть система работает с отказами. Можно определить абсолютную и относительную пропускную способность системы.   
     Относительная пропускная способность равна доли обслуженных заявок относительно всех поступающих и вычисляется по формуле: http://math.immf.ru/img/965.gif. Эта величина равна вероятности *Р*0 того, что канал обслуживания свободен.  
     *Абсолютная пропускная способность (А) — среднее число заявок, которое может обслужить система массового обслуживания в единицу времени: http://math.immf.ru/img/966.gif.*  
     *Вероятность отказа в обслуживании заявки будет равна вероятности состояния «канал обслуживания занят»:*  
     http://math.immf.ru/img/967.gif.  
     *Данная величина* Ротк *может быть интерпретирована как средняя доля необслуженных заявок среди поданных.*  
     **Пример.** Пусть одноканальная СМО с отказами представляет собой один пост ежедневного обслуживания для мойки автомобилей. Заявка — автомобиль, прибывший в момент, когда пост занят, — получает отказ в обслуживании. Интенсивность потока автомобилей λ 1,0 (автомобиль в час). Средняя продолжительность обслуживания — tоб=1,8 часа.   
     Требуется определить в установившемся режиме предельные значения:  
     относительной пропускной способности *q*;  
     абсолютной пропускной способности *А*;  
     вероятности отказа *Ротк*;  
     Сравнить фактическую пропускную способность СМО с номинальной, которая была бы, если бы каждый автомобиль обслуживался точно 1,8 часа и автомобили следовали один за другим без перерыва.  
     ***Решение***  
     Определим интенсивность потока обслуживания:  
     http://math.immf.ru/img/968.gif.  
     Вычислим относительную пропускную способность:  
     *q* =http://math.immf.ru/img/969.gif.  
     Величина *q* означает, что в установившемся режиме система будет обслуживать примерно 35% прибывающих на пост автомобилей.  
     Абсолютную пропускную способность определим по формуле: *А=λ×q=*1×0,356*=*0,356***.***  
     Это означает, что система способна осуществить в среднем 0,356 обслуживания автомобилей в час.  
     Вероятность отказа:  
     *Ротк*=1-*q*=1-0,356=0,644.  
     Это означает, что около 65% прибывших автомобилей на пост ЕО получат отказ в обслуживании.  
     Определим номинальную пропускную способность системы:  
     А*ном*=http://math.immf.ru/img/970.gif (автомобилей в час).  
     Оказывается, что *Аном* в http://math.immf.ru/img/971.gif раза  больше, чем фактическая пропускная способность, вычисленная с учетом случайного характера потока заявок и времени обслуживания.

**6.3. Одноканальная СМО с ожиданием и ограниченной очередью**

     Рассмотрим теперь одноканальную СМО с ожиданием.  
     Система массового обслуживания имеет один канал. Входящий поток заявок на обслуживание поток имеет интенсивность λ. Интенсивность потока обслуживания равна μ (т. е. в среднем непрерывно занятый канал будет выдавать μ обслуженных заявок). Длительность обслуживания — случайная величина, подчи­ненная показательному закону распределения. Заявка, поступившая в момент, когда канал занят, становится в очередь и ожидает обслуживания.  
     Рассмотрим систему с *ограниченной очередью*. Предположим, что независимо оттого, сколько требований по­ступает на вход обслуживающей системы, данная система (очередь + обслуживаемые клиенты) не может вместить более *N*-требований (заявок), из которых одна обслуживается, а (*N*-1) ожидают, Клиенты, не попавшие в ожидание, вынуждены об­служиваться в другом месте и такие заявки теряются. Наконец, источник, порождающий за­явки на обслуживание, имеет неограниченную (бесконечно боль­шую) емкость.  
     Обозначим http://math.immf.ru/img/972.gif - вероятность того, что в системе находится *n* заявок. Эта величина вычисляется по формуле:  
       
     Здесь http://math.immf.ru/img/974.gif - приведенная интенсивность потока.  Тогда вероятность того, что канал обслуживания свободен и в системе нет ни одного клиента, равна: http://math.immf.ru/img/975.gif.  
     С учетом этого можно обозначить  
       
     Определим характеристики одноканальной СМО с ожиданием и ограниченной длиной очереди, равной (N-1):  
     *вероятность отказа в обслуживании заявки:*  
     *Pотк=РN=*  
     *относительная пропускная способность системы:*  
     **  
     *абсолютная пропускная способность:*  
     *А*=*q*∙λ;  
     *среднее число находящихся в системе заявок:*  
     **  
     *среднее время пребывания заявки в системе:*  
     *http://math.immf.ru/img/980.gif*;  
     *средняя продолжительность пребывания клиента (заявки) в очереди:*  
     *Wq*=*Ws*- 1/μ;  
     *среднее число заявок (клиентов) в очереди (длина очереди):*  
     *Lq*=λ(1-*PN*)*Wq*.  
     Рассмотрим пример одноканальной СМО с ожиданием.  
     **Пример.**Специализированный пост диагностики представляет собой одноканальную СМО. Число стоянок для автомобилей, ожидающих проведения диагностики, ограниченно и равно 3, то есть (*N*— 1)=3. Если все стоянки заняты, т. е. в очереди уже находится три автомобиля, то очередной автомобиль, прибывший на диагностику, в очередь на обслуживание не становится. Поток автомобилей, прибывающих на диагностику имеет интенсивность *λ*=0,85 (автомобиля в час). Время диагностики автомобиля распределено по показательному закону и в среднем равно http://math.immf.ru/img/981.gif=1,05 час.  
     Требуется определить вероятностные характеристики поста диагностики, работающего в стационарном режиме.  
     *Решение*  
     Интенсивность потока обслуживаний автомобилей:  
     *http://math.immf.ru/img/982.gif*  
     Приведенная интенсивность потока автомобилей определяется как отношение интенсивностей λ и μ, т.е.  
     *http://math.immf.ru/img/983.gif*  
     Вычислим вероятности нахождения *п* заявок в системе:  
     http://math.immf.ru/img/984.gif  
     *P*1=r∙*P*0=0,893∙0,248=0,221;  
     *P*2=r2∙*P*0=0,8932∙0,248=0,198;  
     *P*3=r3∙*P*0=0,8933∙0,248=0,177;  
     *P*4=r4∙*P*0=0,8934∙0,248=0,158.  
     Вероятность отказа в обслуживании автомобиля:  
     *Pотк*=*Р*4=r4∙*P*0≈0,158.  
     Относительная пропускная способность поста диагностики:  
     *q*=1–*Pотк*=1-0,158=0,842.  
     Абсолютная пропускная способность поста диагностики   
     *А*=λ∙*q*=0,85∙0,842=0,716 (автомобиля в час).  
     Среднее число автомобилей, находящихся на обслуживании и в очереди (т.е. в системе массового обслуживания):  
     http://math.immf.ru/img/985.gif  
     http://math.immf.ru/img/986.gif  
     Среднее время пребывания автомобиля в системе:  
     http://math.immf.ru/img/987.gifчаса.  
     Средняя продолжительность пребывания заявки в очереди на обслуживание:  
     *Wq*=*Ws*-1/μ=2,473-1/0,952=1,423 часа.  
     Среднее число заявок в очереди (длина очереди):  
     *Lq=λ∙(1-PN)∙Wq=*0,85∙(1-0,158)∙1,423=1,02*.*  
     Работу рассмотренного поста диагностики можно считать удовлетворительной, так как пост диагностики не обнаруживает автомобили в среднем в 15,8% случаев (*Ротк*=0,158).

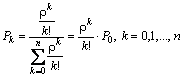
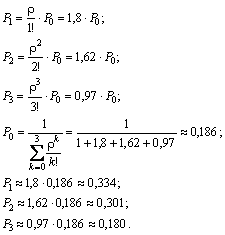
**6.4. Одноканальная СМО с ожиданием и неограниченной очередью**

     Перейдем теперь к рассмотрению *одноканальной СМО с ожиданием без ограничения на вместимость блока ожидания* (т.е. *Ν* → ∞ ). Остальные условия функционирования СМО остаются без изменений.  
     Устойчивое решение в такой системе существует только тогда, когда λ<μ, то есть заявки должны обслуживаться с большей скоростью, чем поступают, в противном случае очередь может разрастись до бесконечности.   
     Вероятность того, что в системе находится *п* заявок, вычисляется по формуле   
     *Pn*=(1-r)r*n*, *n*=0,1,2,…,  
     где r = λ/μ <1.  
     Характеристики одноканальной СМО с ожиданием, без ограничения на длину очереди, следующие:  
     *среднее число находящихся в системе клиентов (заявок) на обслуживание:*  
     *http://math.immf.ru/img/988.gif*  
     *средняя продолжительность пребывания клиента в системе:*  
     http://math.immf.ru/img/989.gif;  
     *среднее число клиентов в очереди на обслуживание:*  
     *Lq*=*LS - http://math.immf.ru/img/990.gif*;  
     *средняя продолжительность пребывания клиента в очереди:*  
     *Wq=http://math.immf.ru/img/991.gif*; http://math.immf.ru/img/992.gif  
     **Пример** . Вспомнив о ситуации, рассмотренной в предыдущем примере, где речь идет о функционировании поста диагностики. Пусть рассматриваемый пост диагностики располагает неограниченным количеством площадок для стоянки прибывающих на обслуживание автомобилей, т.е. длина очереди не ограничена.  
     Требуется определить финальные значения следующих вероятностных характеристик:

1. вероятности состояний системы (поста диагностики);
2. среднее число автомобилей, находящихся в системе (на обслуживании и в очереди);
3. среднюю продолжительность пребывания автомобиля в системе  
   (на обслуживании и в очереди);
4. среднее число автомобилей в очереди на обслуживании;
5. среднюю продолжительность пребывания автомобиля в очереди.

***Решение*** Параметр потока обслуживания  и приведенная интенсивность потока автомобилей ρ определены в предыдущем примере:  
     μ=0,952; ρ=0,893.  
     Вычислим предельные вероятности системы по формулам  
     *P*0=1-r=1-0,893=0,107;  
     *P*1=(1-r)·r=(1-0,893)·0,893=0,096;  
     *P*2=(1-r)·r2=(1-0,893)·0,8932=0,085;  
     *P*3=(1-r)·r3=(1-0,893)·0,8933=0,076;  
     *P*4=(1-r)·r4=(1-0,893)·0,8934=0,068;  
     *P*5=(1-r)·r5=(1-0,893)·0,8935=0,061 и т.д.  
     Следует отметить, что *Р*0 определяет долю времени, в течение которого пост диагностики вынужденно бездействует (простаивает). В нашем примере она составляет 10, 7%, так как Р0=0,107.  
     Среднее число автомобилей, находящихся в системе (на обслуживании и в очереди):  
     http://math.immf.ru/img/993.gifед.  
     Средняя продолжительность пребывания клиента в системе:  
     http://math.immf.ru/img/994.gifчас.  
     Среднее число автомобилей в очереди на обслуживание:  
     http://math.immf.ru/img/995.gif.  
     Средняя продолжительность пребывания автомобиля в очереди:  
     http://math.immf.ru/img/996.gifчас.  
     Относительная пропускаемая способность системы равна единицы, так как все поступившие заявки рано или поздно будут обслужены:  
     *q*=1.  
     Абсолютная пропускная способность:  
     *A*=λ∙*q*=0,85∙1=0,85.  
     Следует отметить, что предприятие, осуществляющее диагностику автомобилей, прежде всего интересует количество клиентов, которое посетит пост диагностики при снятие ограничения на длину очереди.  
     Допустим, в первоначальном варианте количество мест для стоянки прибывших автомобилей как в предыдущем примере было равно трем. Частота *m* возникновения ситуаций, когда прибывающий на пост диагностике автомобиль не имеет возможности присоединить к очереди:  
     *m*=λ∙*PN.*  
     В нашем примере при *N*=3+1=4 и r=0,893,   
     *m*=λ∙*P*0∙ r4=0,85∙0,248∙0,8934=0,134 автомобиля в час.  
     При 12-часовом режиме работы поста диагностики это эквивалентно тому, что пост диагностики в среднем за смену (день) будет терять 12∙0,134=1,6 автомобиля.  
     Снятие ограничения на длину очереди позволяет увеличить количество обслуживающих клиентов в нашем примере в среднем на 1,6 автомобиля за смену (12 ч. работы) пост диагностики. Ясно, что решение относительно расширения площади для стоянки автомобиля, прибывающих на пост диагностики, должно основываться на оценке экономического ущерба, который обусловлен потерей клиентов при наличие всего трех мест для стоянки этих автомобилей.

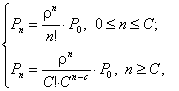
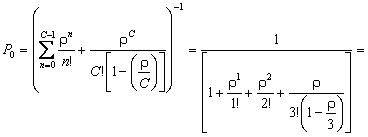
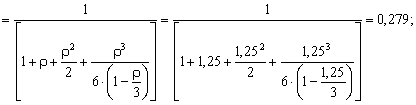
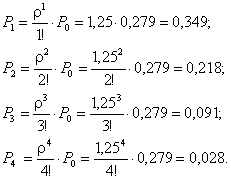
**6.5. Многоканальная СМО с отказами**

     В подавляющем большинстве случаев на практике система массового обслуживания является многоканальными, то есть параллельно могут обслуживаться несколько заявок, и, следовательно**,** *модели с  обслуживающими каналами* (где число каналов обслуживания *n*>1) представляют несомненный интерес.  
     Процесс массового обслуживания, описываемый данной моделью, характеризуется интенсивностью входного потока  λ, при этом параллельно может обслуживаться не более *n* клиентов (заявок). Средняя продолжительность обслуживания одной заявки равняется   1/μ. Режим функционирования того или иного обслуживающего канала не влияет на режим функционирования других обслуживающих каналов системы, при чем длительность процедуры обслуживания каждым из каналов является случайной величиной, починенной экспоненциальному закону распределения. Конечная цель использования параллельно включенных обслуживающих каналов заключается в повышение (по сравнению с одноканальной системой) скорости обслуживания требований за счет обслуживания одновременно  *n* клиентов.  
     Стационарное решение системы имеет вид:  
     ;  
     где      http://math.immf.ru/img/998.gif,         http://math.immf.ru/img/999.gif.  
     Формулы для вычисления вероятностей    называются *формулами Эрланга.*  
     Определим вероятностные характеристики функционирования многоканальной СМО с отказами в стационарном режиме:  
     *вероятность отказа:*  
     http://math.immf.ru/img/a01.gif.  
     так как заявка получает отказ, если приходит в момент, когда все каналов заняты. Величина *Ротк* характеризует полноту обслуживания входящего потока;  
     *вероятность того, что заявка будет принята к обслуживанию* (она же – относительная пропускная способность системы) дополняет *Ротк* до единицы:  
     http://math.immf.ru/img/a02.gif.  
     *абсолютная пропускная способность*   
     *http://math.immf.ru/img/a03.gif*  
     *среднее число каналов, занятых обслуживанием* (http://math.immf.ru/img/a04.gif) следующее:    
     http://math.immf.ru/img/a05.gif  
     Величина http://math.immf.ru/img/a04.gif характеризует степень загрузки СМО.  
     **Пример**. Пусть *n*-канальная СМО представляет собой вычислительный центр (ВЦ) с тремя (*n*=3) взаимозаменяемыми ПЭВМ для решения поступающих задач. Поток задач, поступающих на ВЦ, имеет интенсивность λ=1 задача в час. Средняя продолжительность обслуживания tоб=1,8 час.   
     Требуется вычислить значения:  
     - вероятности числа занятых каналов ВЦ;  
     - вероятности отказа в обслуживании заявки;  
     - относительной пропускной способности ВЦ;  
     - абсолютной пропускной способности ВЦ;  
     - среднего числа занятых ПЭВМ на ВЦ.  
     Определите, сколько дополнительно надо приобрести ПЭВМ, чтобы увеличить пропускную способность ВЦ в 2 раза.  
     **Решение.**  
     Определим параметр μ потока обслуживаний:  
     http://math.immf.ru/img/a06.gif.  
     Приведенная интенсивность потока заявок  
     http://math.immf.ru/img/a07.gif.  
     Предельные вероятности состояний найдем по формулам Эрланга:  
       
     Вероятность отказа в обслуживании заявки  
     http://math.immf.ru/img/a09.gif.  
     Относительная пропускная способность ВЦ  
     http://math.immf.ru/img/a10.gif.  
     Абсолютная пропускная способность ВЦ:  
     http://math.immf.ru/img/a11.gif.  
     Среднее число занятых каналов – ПЭВМ  
     http://math.immf.ru/img/a12.gif  
     Таким образом, при установившемся режиме работы СМО в среднем будет занято 1,5 компьютера из трех – остальные полтора будут простаивать. Работу рассмотренного ВЦ вряд ли можно считать удовлетворительной, так как центр не обслуживает заявки в среднем в 18% случаев (Р3= 0,180). Очевидно, что пропускную способность ВЦ при данных λ и μ можно увеличить только за счет увеличения числа ПЭВМ.  
     Определим, сколько нужно использовать ПЭВМ, чтобы сократить число не обслуженных заявок, поступающих на ВЦ, в 10 раз, т.е. чтобы вероятность отказа в решении задач не превосходила 0,0180. Для этого используем формулу вероятности отказа:  
     http://math.immf.ru/img/a13.gif  
     Составим следующую таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *n* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| *P*0 | 0,357 | 0,226 | 0,186 | 0,172 | 0,167 | 0,166 |
| *Pотк* | 0,673 | 0,367 | 0,18 | 0,075 | 0,026 | 0,0078 |

     Анализируя данные таблицы, следует отметить, что расширение числа каналов ВЦ при данных значениях λ и μ до 6 единиц ПЭВМ позволит обеспечить удовлетворение заявок на решение задач на 99,22%, так как при *n* = 6 вероятность отказа в обслуживании (*Ротк*) составляет 0,0078.

**6.6. Многоканальная СМО с ожиданием**

     Рассмотрим многоканальную систему массового обслуживания с ожиданием. Процесс массового обслуживания при этом характеризуется следующим: входной и выходной потоки имеют интенсивности λ и μ соответственно, параллельно обслуживаться могут не более *С* клиентов, то есть система имеет *С* каналов обслуживания. Средняя продолжительность обслуживания одного клиента равна  http://math.immf.ru/img/a14.gif.      
     Вероятности того, что в системе находятся *п* заявок (*С* обслуживаются, остальные ожидают в очереди) равна:   
       
     где  
     .  
     Решение будет действительным, если выполняется следующее условие:  http://math.immf.ru/img/a17.gif       
     Остальные вероятностные характеристики функционирования в стационарном режиме многоканальной СМО с ожиданием и неограниченной очередью определяется по следующим формулам:  
     *среднее число клиентов в очереди на обслуживание*  
     http://math.immf.ru/img/a18.gif;  
     *среднее число находящихся в системе клиентов* (заявок на обслуживание и в очереди)  
     *LS*=*Lq*+ρ;  
     *средняя продолжительность пребывания клиента* (заявки на обслуживание) *в очереди*  
     http://math.immf.ru/img/a19.gif;  
     *средняя продолжительность пребывания клиента в системе*  
     *http://math.immf.ru/img/a20.gif*.  
     Рассмотрим примеры многоканальной системы массового обслуживания с ожиданием.  
     **Пример.** Механическая мастерская завода с тремя постами (каналами) выполняет ремонт малой механизации. Поток неисправных механизмов, прибывающих в мастерскую,  - пуассоновский и имеет интенсивность λ=2,5 механизма в сутки, среднее время ремонта одного механизма распределено по показательному закону и равно t*об*=0,5 сут. Предположим, что другой мастерской на заводе нет, и, значит, очередь механизмов перед мастерской может расти практически неограниченно.  
     Требуется вычислить следующие предельные значения вероятностных характеристик системы:  
     - вероятность состояний системы;  
     - среднее число заявок в очереди на обслуживание;  
     - среднее число находящихся в системе заявок;  
     - среднюю продолжительность пребывания заявки в очереди;  
     - среднюю продолжительность пребывания заявки в системе.  
     ***Решение***  
     Определим параметр потока обслуживаний  
     http://math.immf.ru/img/a21.gif  
     Приведенная интенсивность потока заявок  
     ρ=λ/μ=2,5/2,0=1,25,  
     при этом λ/μ ∙*с*=2,5/2∙3=0,41<1.  
     Поскольку λ/μ∙*с*<1, то очередь не растет безгранично и в системе наступает предельный стационарный режим работы.  
     Вычислим вероятности состояний системы:  
       
       
       
     Вероятность отсутствия очереди у мастерской  
     Ротк≈*Р*0+*Р*1+*Р*2+*Р*3≈0,279+0,394+0,218+0,091=0,937.  
     Среднее число заявок в очереди на обслуживание  
     http://math.immf.ru/img/a25.gif  
     Среднее число находящихся в системе заявок  
     *Ls*=*Lq*+http://math.immf.ru/img/a26.gif=0,111+1,25=1,361.  
     Средняя продолжительность пребывания механизма в очереди на обслуживание  
     http://math.immf.ru/img/a27.gifсуток.  
     Средняя продолжительность пребывания механизма в мастерской (в системе)  
     http://math.immf.ru/img/a28.gifсуток.